ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν , όπου κ , ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί *με* $\kappa \le \nu$.
Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , όπου i = 1, 2,..., κ ; **Μονάδες 4**

Α2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$. **Μονάδες 6**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
α. Οι διακριτές μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α,β) .
β. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.
γ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Μονάδες 6

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α. $\left(\frac{1}{x}\right)' = ...,\ \mu\varepsilon\ x \ne 0$

β. $\left(x^\nu\right)' = ...,$ όπου ν φυσικός αριθμός.

γ. $\left(cf(x)\right)' = ...,$ όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \alpha x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά και $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με 1, να βρείτε την τιμή του α.
Μονάδες 5

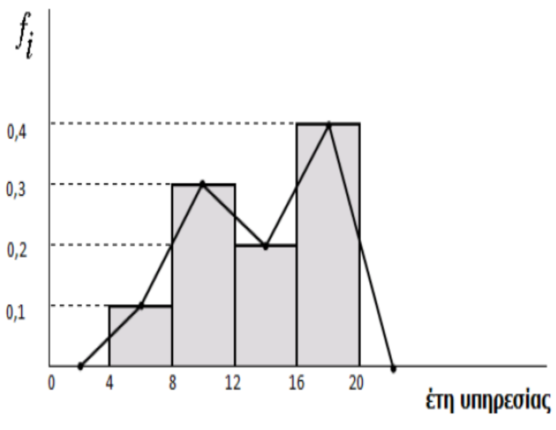
Β2. Για α = 3, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$. **Μονάδες 5**

Β3. Για α = 3, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to 1} g(x)$. **Μονάδες 7**

Β4. Για α = 3, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(0, $f(0)$) . **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων f_i που αφορούν τα έτη υπηρεσίας 50 εκπαιδευτικών.



Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα,

Έτη υπηρεσίας $[\ ,\ )$	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	a_i
$[4,8)$		5		36°
$[8,12)$				
$[12,16)$	14			
$[16,20)$		20		144°
Σύνολο		50		360°

όπου α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 12

Γ2. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας;

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη.

Μονάδες 5

Γ4. Πόσο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και περίμετρο 80m.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 40x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης E(x).

Μονάδες 10

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση E(x) ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 6

Δ3. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Μονάδες 4

Δ4. Δύο οικόπεδα Α και Β σχήματος ορθογωνίου με περίμετρο 80m το καθένα έχουν μήκη x_A=29,5m και x_B=34,2m, αντίστοιχα. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποιο από τα δύο οικόπεδα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 65

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 28

Α3. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος

Α4. α) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, με $x \neq 0$

β) $\left(x^{\nu}\right)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$, όπου ν φυσικός αριθμός γ) $\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot f'(x)$, όπου $c\in\mathbb{R}$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A(1,0)\in C_f \Leftrightarrow f(1)=0 \Leftrightarrow 1-\alpha+2=0 \Leftrightarrow \boxed{a=3}$

Β2. $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$, πρέπει $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$.

Άρα $A_g=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Β3. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{-1}{2}$

Β4. $M(0,f(0))\equiv(0,2)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $f'(x)=2x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

Η εξίσωση εφαπτομένης είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=f'(0)=-3$.

Άρα $\varepsilon: y=-3x+\beta$

$M(0,2)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow 2=\beta$

Άρα $\boxed{\varepsilon: y=-3x+2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Έτη υπηρεσίας [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	α_i
[4,8)	6	5	0,1	36^o
[8,12)	10	15	0,3	108^o
[12,16)	14	10	0,2	72^o
[16,20)	18	20	0,4	144^o
Σύνολο		50	1	360^o

Για τις κεντρικές τιμές των κλάσεων ισχύει $x_i=\dfrac{b+a}{2},\quad i=1,2,3,4$.

Από το ιστόγραμμα προκύπτουν:

$f_1=0,1$

$f_2=0,3$

$f_3=0,2$

$f_4=0,4$

Για τα ν_i:

$$f_i=\frac{v_i}{v}\Leftrightarrow v_i=f_i\cdot v,\quad i=1,2,3,4$$

Άρα $v_2=f_2\cdot v=15$

$v_3=f_3\cdot v=10$.

Για τα α_i:

$$a_i=v_i\cdot\frac{360^o}{v},\quad i=1,2,3,4$$

άρα $a_2 = f_2 \cdot 360^o = 108^o$

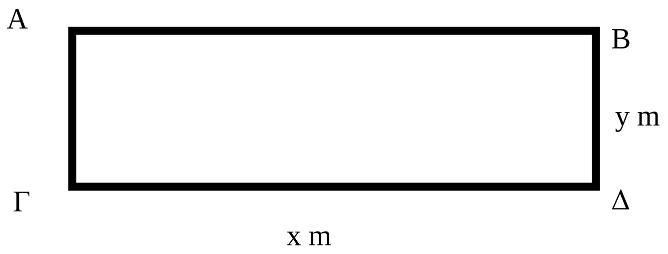
και $a_3 = f_3 \cdot 360^o = 72^o$

Γ2. Το πλήθος των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας είναι: $v_2 + v_3 + v_4 = 45$.

Γ3. Το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη είναι $f_1\% + f_2\% + f_3\% = 60\%$.

Γ4. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 1.

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Περίμετρος ορθογωνίου παρ/μου: $\Pi = 2x + 2y$ με $x > 0$ και $y > 0$. Όμως Π = 80m, οπότε
$2x + 2y = 80 \Leftrightarrow x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - x$.

Επίσης έχουμε $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 40 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 40 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 40)$

$E = xy = x(40 - x) = 40x - x^2$ δηλαδή $E(x) = -x^2 + 40x, \quad x \in (0, 40)$

Δ2. Η E(x) είναι παραγωγίσιμη στο (0,40) ως πολυωνυμική με $E'(x) = (-x^2 + 40x)' = -2x + 40$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 40 = 0 \Leftrightarrow x = 20$ δεκτή διότι $20 \in (0, 40)$

$E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 40 > 0 \Leftrightarrow x < 20$

x	0		20		40
$E'(x)$		+	0	−	
$E(x)$		↗		↘	

Άρα η E(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (0,20] και γνησίως φθίνουσα στο [20,40)

Δ3. Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για x = 20m με τιμή $E(20) = 40 \cdot 20 - 20^2 = 400m^2$

Δ4. Σύμφωνα με το παραπάνω το εμβαδόν του οικοπέδου Α είναι $E(x_A) = -x_A^2 + 40x_A$
και του Β είναι $E(x_B) = -x_B^2 + 40x_B$ όμως $29{,}5 < 34{,}2 \Leftrightarrow x_A < x_B \Leftrightarrow E(x_A) > E(x_B)$ αφού $E \downarrow$ στο$[20, 40)$

Άρα το οικόπεδο Α έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το Β.

<u>ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ</u>

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ
ΦΕΡΓΑΔΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΝΙΚΟΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΜΑΣΤΡΟΚΑΛΟΣ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ • ΚΩΣΤΑΣ ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ
ΚΩΝ/ΝΑ ΣΤΕΙΑΚΑΚΗ •ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΜΑΚΑΡΩΝΗ

εκπαιδευτικός οργανισμός
ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ