ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει παράγωγο στο σημείο $x_o = 0$.

β. Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα.

γ. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i = \dfrac{\nu}{\nu_i}$, όπου ν_i η συχνότητα της τιμής x_i και ν το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 6

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

α. $(f(x)\cdot g(x))' = \dots$

β. $(\sqrt{x})' = \dots,$ με $x > 0$

γ. $(\sigma\upsilon\nu x)' = \dots$

Μονάδες 9

Α4. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι $f'(x) = (x^2)' = 2x$, για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές ενός σχολείου κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών:

x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0				
1				70
2	10			90
3		10		100
Σύνολο		100		

Δίνεται ότι το *40%* των μαθητών δεν διάβασαν κανένα βιβλίο.

Β1. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 12

Β2. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που έχουν διαβάσει τρία βιβλία;

Μονάδες 3

Β3. Πόσοι μαθητές διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο;

Μονάδες 5

Β4. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που διάβασαν το πολύ δύο βιβλία;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(-1,-2)$.

Μονάδες 4

Γ2. Για $\lambda = 3$ να βρείτε τις συναρτήσεις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

Γ3. Για $\lambda = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

Μονάδες 8

Γ4. Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)+3}{f''(x)}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

Μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, έχει εξίσωση $y = 1$.

Μονάδες 8

Δ4. Θεωρούμε σημείο $A(x,1)$ της ευθείας $y = 1$ με $x > 0$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(x,1)$ και $O(0,0)$ ως προς x, όταν $x = 1$.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Βλ. σχολ. βιβλίο σελ. 16

Α2. **(α) Λ**
(β) Σ
(γ) Λ

Α3. **(α)** $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

(β) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0$

(γ) $(συνx)' = -\,ημx$

Α4. Βλ. σχολ. βιβλίο σελ. 28-29**.**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το 40% των μαθητών δεν διάβασαν κανένα βιβλίο άρα $f_1\% = 40\%$.
Επίσης $F_1\% = f_1\% = 40\%$ και $f_2\% = F_2\% - f_1\% = 30\%$, $f_3\% = F_3\% - F_2\% = 20\%$.
$f_3 = \dfrac{v_3}{v} \Leftrightarrow v = \dfrac{10}{0.2} \Leftrightarrow v = 50$ και $f_1 = \dfrac{v_1}{v} \Leftrightarrow v_1 = f_1 \cdot v = 0,4\cdot 50 = 20$. Ομοίως συμπληρώνουμε τα v_2, v_3.
$N_1 = v_1 = 20$, $N_2 = N_1 + v_2 = 20 + 15 = 35$. Με τον ίδιο τρόπο συμπληρώνουμε τα N_3, N_4

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	20	40	20	40
1	15	30	35	70
2	10	20	45	90
3	5	10	40	100
Σύνολο	50	100		

Β2. Το ποσοστό των μαθητών που έχουν διαβάσει τρία βιβλία είναι $f_3\% = 10\%$.
Β3. Τουλάχιστον ένα βιβλίο διάβασαν $v_2 + v_3 + v_4 = 30$ μαθητές
Β4. Το πολύ δύο βιβλία διάβασαν $F_3\% = 90\%$ των μαθητών.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f(x) = x^3 - λx^2 + 2,\quad x \in \mathbb{R}$ και $λ \in \mathbb{R}$. Εφόσον η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(–1,–2) οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν, επομένως είναι
$f(-1) = -2 \Leftrightarrow (-1)^3 - λ\cdot(-1)^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow -1 - λ + 2 = -2 \Leftrightarrow -λ = 1 - 2 - 2 \Leftrightarrow -λ = -3 \Leftrightarrow λ = 3$

Γ2. Για λ = 3 είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2,\quad x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 2\right)' = 3x^2 - 6x$ και
$f''(x) = \left(3x^2 - 6x\right)' = 6x - 6$

Γ3. Είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2,\quad x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Θέτουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0$ άρα x = 0, x = 2. Από γνωστούς κανόνες προσήμων προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[2,+\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [0,2].
Για x = 0 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το f(0) = 2 και για x = 2 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το f(2) = –2

Γ4. Είναι $f'(x)=3x^2-6x$ και $f''(x)=6x-6$ άρα

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)+3}{f''(x)}=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-6x+3}{6x-6}=\lim_{x\to1}\frac{3(x^2-2x+1)}{6(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{3\cdot(x-1)^2}{6(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2}=0$$

ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=\left(x^2+4x+5\right)^{20},\ x\in R$

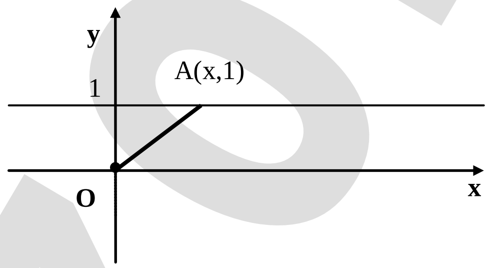
Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=20\left(x^2+4x+5\right)^{19}\left(x^2+4x+5\right)'=20\left(x^2+4x+5\right)^{19}(2x+4)=40\left(x^2+4x+5\right)^{19}(x+2)$.

Δ2. Έχουμε $\lim\limits_{x\to h}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=f'(-2)$, αλλά $f'(-2)=40(4-8+5)^{19}(-2+2)=0$.

Οπότε το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to h}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=0$.

Δ3. Έστω $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M\left(x_0,f(x_0)\right)$.
Αφού η ε είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχουμε ότι $\lambda=f'(x_0)=0\Leftrightarrow 40(x_0{}^2+4x_0+5)^{19}(x_0+2)=0$
και $x_0{}^2+4x_0+5\neq0$ για κάθε $x\in R$, αφού Δ < 0. Άρα $x_0+2=0\Leftrightarrow x_0=-2$. Τότε $f(-2)=(4-8+5)^{20}=1^{20}=1$.
Τα σημείο επαφής είναι $M(-2,1)$ το οποίο ανήκει στη ε, άρα β =1. Οπότε $\varepsilon: y=1$.

Δ4. α΄ τρόπος:



Από πυθαγορειο θεώρημα η απόσταση των σημείων A(x,1) και (0,0) είναι $(OA)^2=x^2+1^2\Leftrightarrow(OA)=\sqrt{x^2+1}$, $x>0$

β΄ τρόπος:
Από τον τύπο της απόστασης δύο σημείων είναι $(OA)=\sqrt{(x-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{x^2+1}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $d(x)=\sqrt{x^2+1},\ x>0$.

Ο ρυθμός μεταβολής είναι $d'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'\Leftrightarrow d'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot2x\Leftrightarrow d'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Άρα για x = 1 έχουμε : $d'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt2}=\dfrac{\sqrt2}{2}$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ
ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΦΕΡΓΑΔΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
•ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ ΝΙΚΟΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΜΑΘΙΟΥΔΑΚΗ • ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΜΑΚΑΡΩΝΗ